

7.1

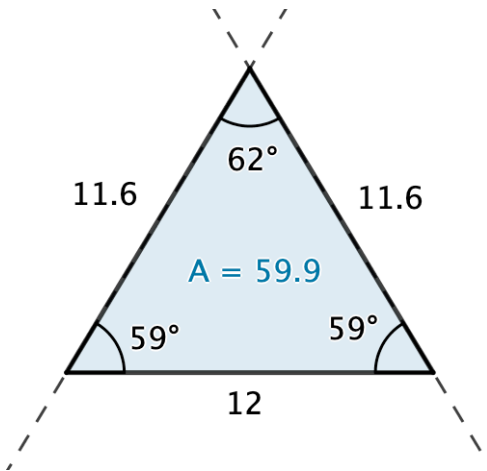
Kolmio on tasakylkinen, joten sen kantakulmat ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan kantakulman α suuruus.

$$\alpha + \alpha + 62^\circ = 180^\circ$$

Kolmion kulmien summa on 180° .
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 59^\circ$$

Piirretään kolmion kannaksi jana, jonka pituus on 12. Piirretään kannan molempiin päihin 59° :n kulma. Piirretään kannan päihin kulmien mukaiset suorat ja merkitään niiden leikkauspiste.



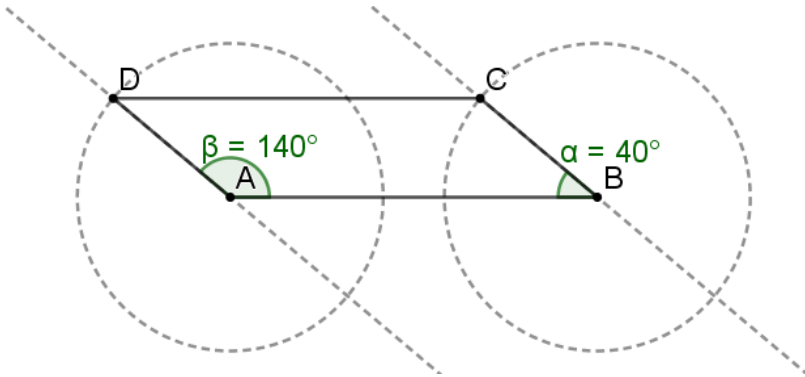
Mitataan kylkien pituus ja kolmion pinta-ala. Kylkien pituus on noin 11,6 ja pinta-ala noin 59,9.

Vastaus

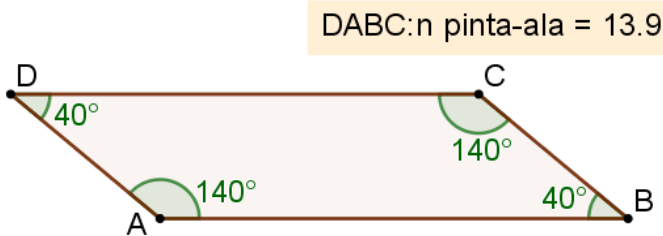
kylkien pituus 11,6; kolmion pinta-ala 59,9

7.2

Piirretään jana, jonka pituus on 7,2 ja janan toiseen päähän 40° :n kulma ja toiseen 140° :n kulma. Piirretään janan päätepisteisiin ympyrät, joiden säde on 3. Piirretään loput suunnikkaan sivut.



Mitataan kulmien suuruudet ja pinta-ala.



Kulmien suuruudet ovat 140° ja 40° , ja pinta-ala on 14 cm^2 .

Vastaus

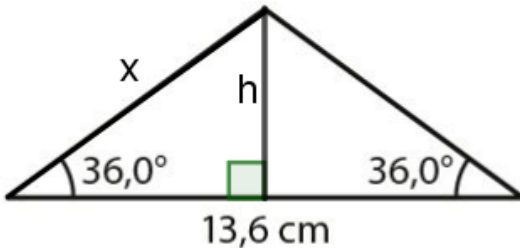
pinta-ala 14 cm^2 , muiden kulmien suuruudet 140° ja 40° .

7.3

- a) Piirretään kolmion huipusta kannalle korkeusjana. Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman. Näin syntyy suorakulmainen kolmio, jonka kannan pituus on

$$\frac{13,6}{2} = 6,8.$$

Nimetään korkeusjana kirjaimella h ja kolmion kylki kirjaimella x .



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kyljen pituus x .

$$\cos 36,0^\circ = \frac{6,8}{x}$$

Kulman kosini on viereisen kateetin suhde hypotenuusaan.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx 8,41 \text{ (cm)}$$

- b) Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kolmion korkeus h .

$$\tan 36,0^\circ = \frac{h}{6,8}$$

Kulman tangentti on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan.

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h \approx 4,94 \text{ (cm)}$$

Lasketaan tasakylkisen kolmion pinta-ala

$$A \approx \frac{1}{2} \cdot 13,6 \cdot 4,94 \quad A = \frac{1}{2} ah, \text{ missä } a = 13,6 \text{ ja } h = 4,94.$$

$$\approx 33,6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus

- a) 8,41 cm
b) 33,6 cm²

7.4

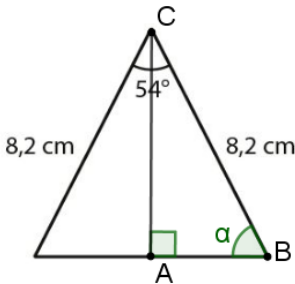
- a) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Kolmion kulmien summa on 180° .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kantakulman suuruus α .

$$\alpha + \alpha + 54^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 63^\circ$$

- b) Piirretään kolmiolle korkeusjana, jolloin muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota.



Korkeusjana puolittaa kolmion kannan ja huippukulman. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan janan AB pituus.

$$\sin 27^\circ = \frac{AB}{8,2}$$

$$AB \approx 3,72 \text{ (cm)}$$

Lasketaan kannan pituus.

$$2 \cdot AB = 2 \cdot 3,72 \approx 7,4 \text{ (cm)}$$

- c) Ratkaistaan korkeusjanan AC pituus.

$$\sin 63^\circ = \frac{AC}{8,2}$$

$$AC \approx 7,31 \text{ (cm)}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2}ah$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 3,72) \cdot 7,31$$

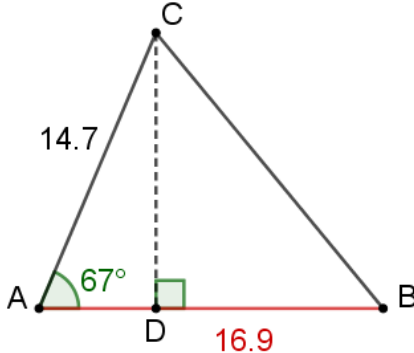
$$\approx 27 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus

- a) 63° b) 7,4 cm c) 27 cm^2

7.5

- a) Valitaan kolmion kannaksi sivu, jonka pituus on 16,9 cm. Piirretään tilanteesta kuva.



Korkeusjana DC on kohtisuorassa kolmion kantaa vastaan. Kolmion sisään muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota.

Ratkaistaan kolmion korkeus DC .

$$\sin 67^\circ = \frac{DC}{14,7}$$

Kulman sini on vastaisen kateetin
suhde hypotenuusaan.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$DC \approx 13,5314 \text{ (m)}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

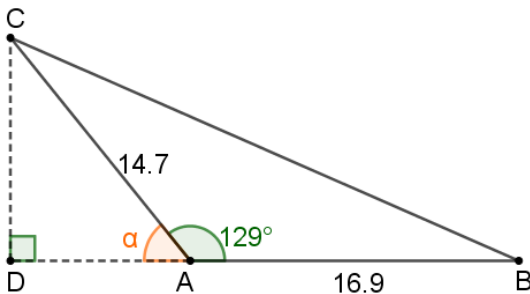
$$A = \frac{1}{2} \cdot 16,9 \cdot 13,5314$$

$$A = \frac{1}{2} ah, \text{ missä } a = 16,9 \\ \text{ja } h \approx 13,5314.$$

$$\approx 114 \text{ (m}^2\text{)}$$

Kolmion pinta-ala on 114 cm².

- b) Valitaan kolmion kannaksi sivu, jonka pituus on 16,9 cm. Piirretään tilanteesta kuva.



Korkeusjana DC on kohtisuorassa kolmion kannan jatketta vastaan. Kolmion ulkopuolelle muodostuu suorakulmainen kolmio.

Lasketaan kulman α suuruus.

$$180^\circ - 129^\circ = 51^\circ$$

Kulma α on kulman 129° vieruskulma.

Ratkaistaan kolmion korkeus DC .

$$\sin 51^\circ = \frac{DC}{14,7}$$

$$DC \approx 11,4240$$

Lasketaan kolmion ABC pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 16,9 \cdot 11,4240$$

$$A = \frac{1}{2} ah, \text{ missä } a = 16,9 \\ \text{ja } h \approx 11,4240.$$

$$\approx 96,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Kolmion pinta-ala on $96,5 \text{ cm}^2$.

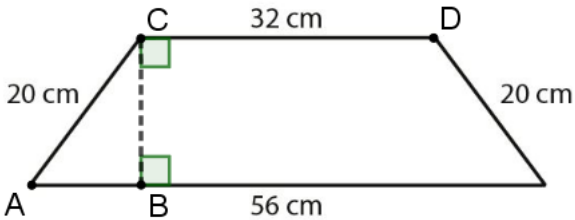
Vastaus

a) 114 cm^2

b) $96,5 \text{ cm}^2$

7.6

Piirretään tasakylkiselle puolisuunnikkaalle korkeusjana BC .



Lasketaan janan AB pituus.

$$\begin{aligned} AB &= \frac{56 - 32}{2} \\ &= 12 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Muodostetaan yhtälö kolmiosta ABC ja ratkaistaan kulman A suuruus.

$$\begin{aligned} \cos \angle A &= \frac{12}{20} \\ \angle A &\approx 53^\circ \end{aligned}$$

Kolmion kulmien summa on 180° . Lasketaan kulman ACB suuruus.

$$\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$

Lasketaan kulman ACD suuruus.

$$\angle ACD = 90^\circ + 37^\circ = 127^\circ$$

Symmetrian perusteella puolisuunnikkaan kaksi muuta kulmaa ovat suuruudeltaan myös 53° ja 127° .

Vastaus

53° , 53° , 127° ja 127°

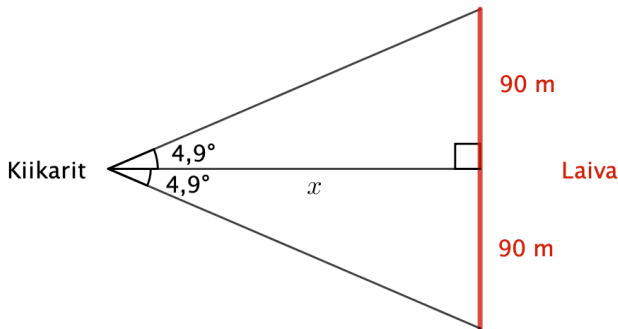
7.7

Merkitään laivan etäisyyttä kirjaimella x .

Korkeusjana puolittaa syntyvän tasakylkisen kolmion huippukulman ja kannan.

Huippukulman puolikas on $\frac{9,8^\circ}{2} = 4,9^\circ$

ja kannan puolikas $\frac{180 \text{ m}}{2} = 90 \text{ m}$.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan etäisyys x .

$$\tan 4,9^\circ = \frac{90}{x} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \approx 1049,8... \text{ m} = 1,0 \text{ km}$$

Vastaus

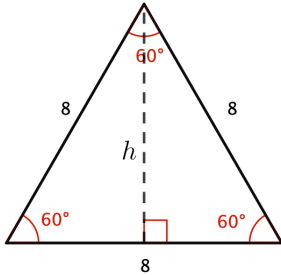
1,0 km

7.8

Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret. Lasketaan yhden kulman suuruus.

$$\alpha = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

Merkitään kolmion korkeutta kirjaimella h .



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kolmion korkeus h .

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{8}$$

$$h \approx 6,93 \text{ (cm)}$$

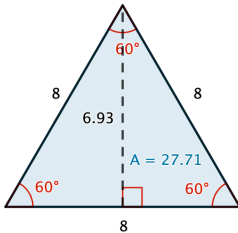
Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2}ah$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6,93 \cdot 8,00$$

$$\approx 27,7 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Piirretään kolmio geometriaohjelmalla. Piirretään jana, jonka pituus on 8,00 ja täydennetään se tasasivuiseksi kolmioksi. Piirretään kolmion kannalle korkeusjana. Mitataan kolmion pinta-ala ja korkeus.

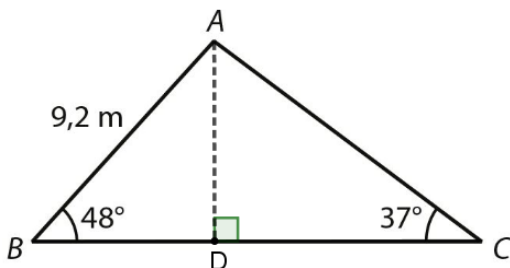


Vastaus

korkeus 6,93 cm, pinta-ala 27,7 cm²

7.9

Piirretään kolmiolle korkeusjana AD .



Muodostetaan suorakulmaisesta kolmiosta BDA yhtälö ja ratkaistaan korkeusjanan AD pituus.

$$\sin 48^\circ = \frac{AD}{9,2} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AD \approx 6,837 \text{ (m)}$$

Muodostetaan kolmiosta DCA yhtälö ja ratkaistaan sivun AC pituus.

$$\sin 37^\circ = \frac{AD}{AC} \quad AD = 6,837$$

$$\sin 37^\circ = \frac{6,837}{AC} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AC \approx 11 \text{ (m)}$$

Sivun AC pituus on 11 m .

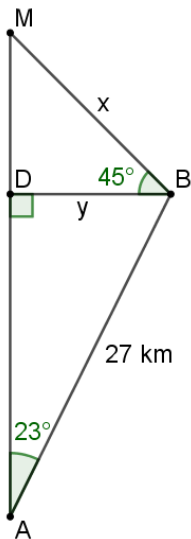
Vastaus

11 m

7.10

Piirretään kuva. Merkitään majakkaa kirjaimella M ja laivan ensimmäistä sijaintia kirjaimella A ja jälkimmäistä sijaintia kirjaimella B .

Kysytty etäisyys on $MB = x$.



Muodostetaan suorakulmaisesta kolmiosta ABD yhtälö ja ratkaistaan y .

$$\sin 23^\circ = \frac{y}{27}$$

$$y \approx 10,55 \text{ (km)}$$

Muodostetaan kolmiosta DBM yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\cos 45^\circ = \frac{y}{x} \quad y = 10,55$$

$$\cos 45^\circ = \frac{10,55}{x} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \approx 15 \text{ (km)}$$

Laivan etäisyys majakasta on 15 km.

Vastaus

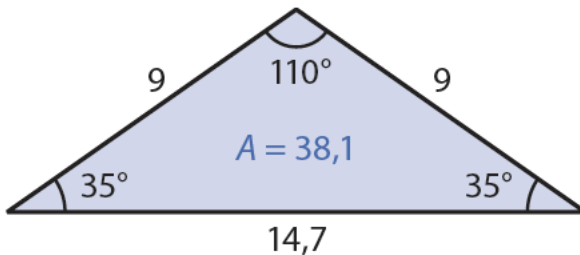
15 km

7.11

Kolmion kulmien summa on 180° . Lasketaan kolmion huippukulman suuruus.

$$180^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 110^\circ$$

Piirretään jana, jonka pituus on 9 ja janan päihin 35° :n ja 110° :n kulmat. Piirretään jana päihin kulmien mukaisesti kulkevat suorat. Näiden suorien leikkauspiste on kolmion kolmas kärki.



Mitataan kolmion kannan pituus ja pinta-ala.

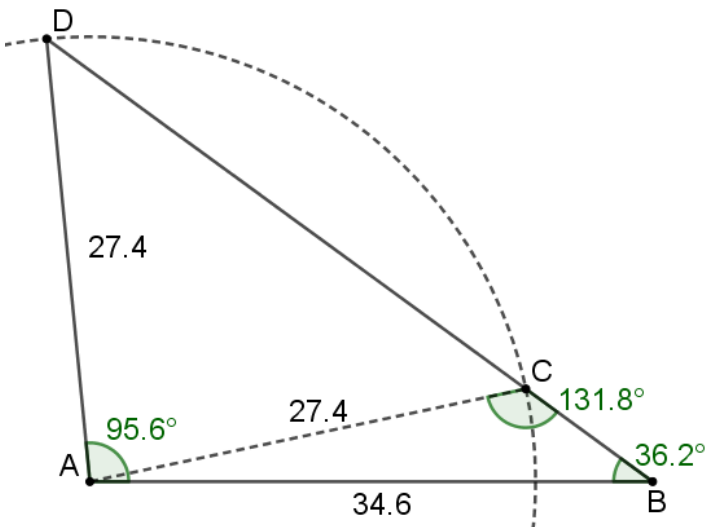
Kannan pituus on 14,7 ja kolmion pinta-ala on 38,1.

Vastaus

kannan pituus 14,7; pinta-ala 38,1

7.12

Piirretään jana AB , jonka pituus on $34,6$ ja sen päätepisteeseen B $36,2^\circ$ kulma ja päätepisteeseen A ympyrä, jonka säde on $27,4$. Piirretään suora pisteestä B kolmion toiseksi sivuksi. Ympyrällä ja suoralla on kaksi leikkauspistettä (kuvassa D ja C), jotka kumpikin voivat olla kolmion kolmas kärki.



Kolmioita muodostuu kaksi erilaista.

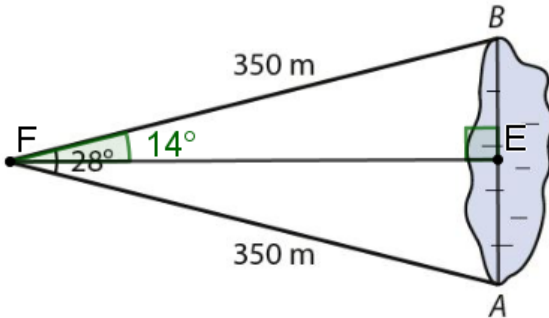
Suurin kulma on joko $95,6^\circ$ tai $131,8^\circ$.

Vastaus

Kolmio voidaan piirtää kahdella tavalla. Suurin kulma on $95,6^\circ$ tai $131,8^\circ$.

7.13

Jaetaan kuvan tasakylkinen kolmio korkeusjanalla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan lammen pituus AB .

$$\begin{aligned}\sin 14^\circ &= \frac{BE}{350} & BE &= \frac{1}{2} AB \\ &= \frac{\frac{1}{2} AB}{350} & \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ AB &\approx 170 \text{ (m)}\end{aligned}$$

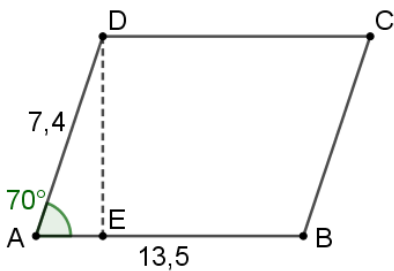
Lammen pituus on 170 m.

Vastaus

170 m

7.14

Piirretään kuva.



Muodostetaan suorakulmaisesta kolmiosta AED yhtälö ja ratkaistaan suunnikkaan korkeus DE .

$$\sin 70^\circ = \frac{DE}{7,4} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$DE \approx 6,9537 \text{ (cm)}$$

Lasketaan suunnikkaan pinta-ala.

$$A = 6,9537 \cdot 13,5$$

$$\approx 94 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus

$$94 \text{ cm}^2$$

7.15

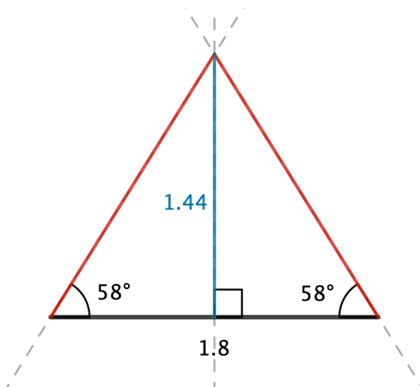
Kuvaaja on lähimpänä taulua, kun hän on tasakylkisen kolmion huippupisteessä, jonka kannan pituus on taulun leveys 1,80 m ja huippukulmana on objektiivin kuvakulma.

a) Lasketaan syntyvän tasakylkisen kolmion kantakulma α .

$$\alpha + \alpha + 64^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 58^\circ$$

Piirretään jana, jonka pituus on 1,8. Piirretään janan päätepisteisiin 58° :n kulmat ja näiden mukaiset suorat. Suorien leikkauspiste on tasakylkisen kolmion huippu. Piirretään huipusta kannalle korkeusjana ja mitataan sen pituus.



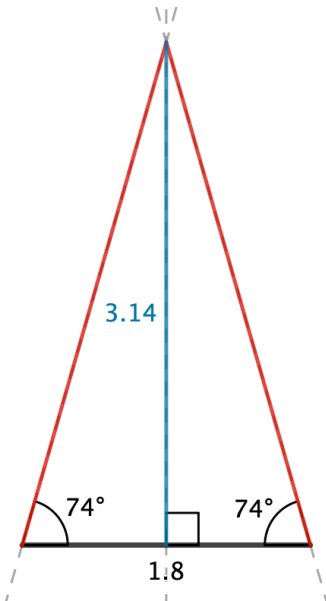
Valokuvaajan tulee seistä 1,4 m etäisyydellä taulusta.

b) Lasketaan syntyvän tasakylkisen kolmion kantakulma α .

$$\alpha + \alpha + 32^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 74^\circ$$

Piirretään jana AB , jonka pituus on 1,8. Piirretään janan päätepisteisiin 74° :n kulmat ja näiden mukaiset suorat. Suorien leikkauspiste on tasakylkisen kolmion huippu. Piirretään huipusta kannalle korkeusjana ja mitataan sen pituus. (Kuva on helpointa piirtää muokkaamalla vain a-kohdan kuvassa kantakulmien suuruudet)



Valokuvaajan tulee seistä 3,1 m etäisyydellä taulusta.

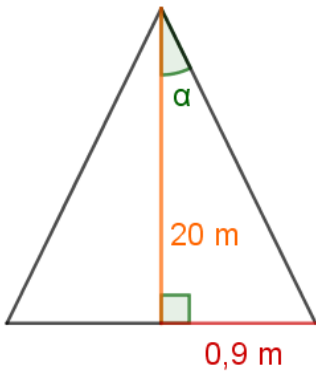
Vastaus

a) 1,4 m

b) 3,1 m

7.16

Merkitään näkökulman puolikasta kirjaimella α . Ikkunan leveyden puolikas on $\frac{1,80 \text{ m}}{2} = 0,90 \text{ m}$.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α .

$$\tan \alpha = \frac{0,9}{20} \quad \text{Ratkastaan CAS-laskimella.}$$
$$\alpha \approx 2,577^\circ$$

Lasketaan koko näkökulman suuruus.

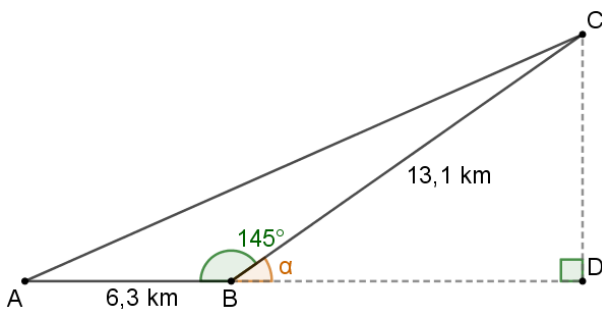
$$2\alpha = 2 \cdot 2,577^\circ$$
$$\approx 5,2^\circ$$

Vastaus

$$5,2^\circ$$

7.17

Piirretään kuva.



Lasketaan 145° :n kulman vieruskulman α suuruus.

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - 145^\circ \\ &= 35^\circ\end{aligned}$$

Ratkaistaan suorakulmaisen kolmion BDC korkeus DC .

$$\begin{aligned}\sin 35^\circ &= \frac{DC}{13,1} && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\ DC &\approx 7,5139 \text{ (km)}\end{aligned}$$

Lasketaan kolmion ABC pinta-ala.

$$\begin{aligned}A &\approx \frac{1}{2} \cdot 6,3 \cdot 7,5139 \\ &\approx 24 \text{ (km}^2\text{)}\end{aligned}$$

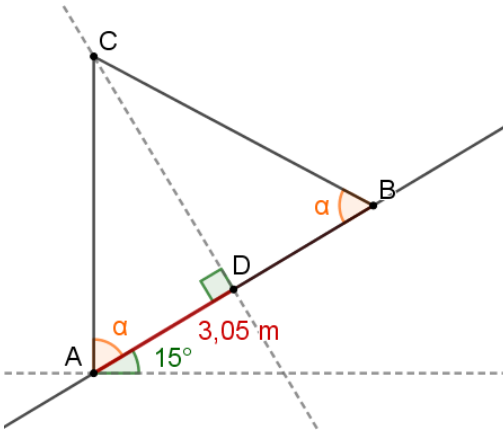
Metsäpalstan pinta-ala on 24 km^2 .

Vastaus

$$24 \text{ km}^2$$

7.18

Piirretään kuva. Jana AC on sähköpylväs, BC on tukivaijeri ja suora AB on rinne.



Sähköpylväs on pystysuora, joten kulman α suuruus on $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

Kolmio ABC on tasakylkinen, joten sen korkeusjana DC jakaa kannan kahteen yhtä pitkään osaan. Näiden osien pituus on $\frac{6,1 \text{ m}}{2} = 3,05 \text{ m}$.

Muodostetaan kolmiosta ADC yhtälö ja ratkaistaan sähköpylvään korkeus AC .

$$\cos 75^\circ = \frac{3,05}{AC} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AC \approx 12 \text{ (m)}$$

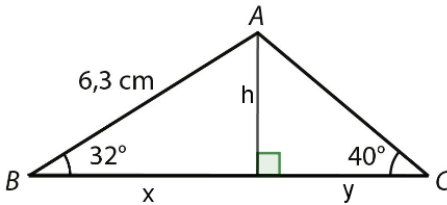
Sähköpylvään korkeus on 12 m.

Vastaus

12 m

7.19

a) Täydennetään kuvaa.



$$\sin 32^\circ = \frac{h}{6,3} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$h \approx 3,338 \text{ (cm)}$$

$$\tan 32^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\tan 32^\circ = \frac{3,338}{x} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x \approx 5,342 \text{ (cm)}$$

$$\tan 40^\circ = \frac{h}{y}$$

$$\tan 40^\circ = \frac{3,338}{y} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$y \approx 3,979 \text{ (cm)}$$

Lasketaan kannan pituus BC .

$$BC = x + y$$

$$= 5,342 + 3,979$$

$$\approx 9,3 \text{ (cm)}$$

Kannan pituus on 9,3 cm.

b) Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h \approx \frac{1}{2} \cdot 9,322 \cdot 3,338$$

$$\approx 16 \text{ (cm}^2\text{)}$$

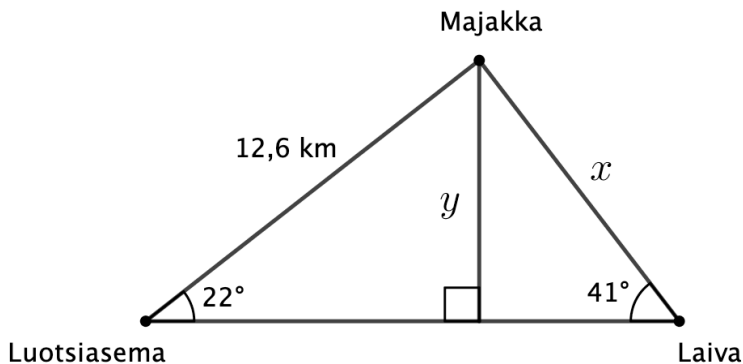
Kolmion pinta-ala on 16 cm².

Vastaus

a) 9,3 cm b) 16 cm²

7.20

Piirretään kuva.



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan ensin y ja sitten x .

$$\sin 22^\circ = \frac{y}{12,6}$$

$$y = 12,6 \cdot \sin 22^\circ \approx 4,72004 \text{ (km)}$$

$$\sin 41^\circ = \frac{y}{x}$$

$$x = \frac{y}{\sin 41^\circ} = \frac{4,72004}{\sin 41^\circ} \approx 7,2 \text{ (km)}$$

Laiva on 7,2 km:n etäisyydellä majakasta.

Vastaus

7,2 km